

BÀI TẬP THAM KHẢO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ CHUỖI

Nhóm ngành: VN, VP, ICT Mã học phần: MI1134 (E)

Chương 1

Chuỗi

1.1 Chuỗi số

Bài 1. Xét sự hội tụ và tính tổng nếu có của các chuỗi số sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n+1} \\ \text{b) } \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \end{array}$$

Bài 2. Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{4n+5} & \text{f) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} & \text{k) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} \\ \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n & \text{g) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right) & \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} \\ \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{1}{n^2} \right) & \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n} & \text{m) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^3} \\ \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{e} - 1) & \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2 8^n} & \text{n) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \\ \text{e) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\ln n} & \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!} & \text{o) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} \end{array}$$

Bài 3. Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của các chuỗi số sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} & \text{c) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} & \text{e) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1} \\ \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin (\pi \sqrt{n^2 + 1}) & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100} & \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} & \text{k)} \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \\ \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n & \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} & \text{l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2} \end{array}$$

Bài 4. Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, liệu có thể suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ cũng hội tụ? Vẫn câu hỏi này, nếu thêm giả thiết chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

1.2 Chuỗi hàm số

Bài 5. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^n} & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1} & \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} \\ \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{e^{nx}} & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x + (-1)^n}{n} & \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n} \right)^n \\ \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} & \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n} \right)^n & \text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} \\ \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + 1} & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right) & \text{l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}} \end{array}$$

Bài 6. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số trên tập đã cho:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} x^n, |x| < q < 1 & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(x^2+1)^n}, x \in \mathbb{R} \\ \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} x^n, |x| < 1 & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^n, x \in [-1; 1] \end{array}$$

Bài 7. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{n^2+1} & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sin n)x^n \\ \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^n & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+3^n} & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n \\ \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^n x^n & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n & \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n} (n!)^3}{(3n)!} \tan^n x \end{array}$$

Bài 8. Tính tổng của các chuỗi sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n, x \in (-1; 1) & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, x \in (-1; 1) \\ \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)3^n} & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}, x \in (-1; 1) \end{array}$$

Bài 9. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Maclaurin

a) $y = \frac{2x + 4}{x^2 - 3x + 2}$

c) $y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

e) $y = \ln(1 + x - 2x^2)$

b) $y = x \sin^2 x$

d) $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

f) $y = \arcsin x$

Bài 10. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Taylor (trong lân cận điểm x_0 tương ứng):

a) $y = \frac{1}{2x + 3}, x_0 = 4$

b) $y = \sin \frac{\pi x}{3}, x_0 = 1$

c) $y = \sqrt{x}, x_0 = 4$

Bài 11. Khai triển các hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ sau thành chuỗi Fourier

a) $y = x, x \in (-\pi; \pi)$

b) $y = |x|, x \in [-\pi; \pi]$

Bài 12. Khai triển hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2$ xác định như sau $f(x) = |x|$ trong khoảng $(-1, 1)$ thành chuỗi Fourier.

Bài 13. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Fourier

a) $f(x) = \begin{cases} A & \text{nếu } 0 < x < l \\ 0 & \text{nếu } l < x < 2l \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} ax & \text{nếu } -\pi < x < 0 \\ bx & \text{nếu } 0 < x < \pi \end{cases}$

c) $f(x) = 10 - x, x \in (5; 15)$

Bài 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } -\pi \leq x < 0, \\ x + 1, & \text{nếu } 0 \leq x < \pi, \end{cases}$ tuần hoàn chu kỳ 2π . Tìm giá trị của chuỗi Fourier $S(x)$ của hàm số $f(x)$ tại các điểm $x = 10\pi$ và $x = 12$.

Chương 2

Phương trình vi phân

2.1 Phương trình vi phân cấp một

Bài 15. Giải các phương trình vi phân cấp một sau.

1) Các phương trình khuyết (SV tự học):

a) $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1), y(0) = 2$

c) $x = (y')^2 - y' + 2$

b) $y' + y = 1$

d) $y^2 + (y')^2 = 4$

2) Các phương trình phân ly:

a) $y' = x^2y$

c) $y' + e^{y+x} = 0$

b) $2y(x^2 + 4)dy = (y^2 + 1)dx$

d) $1 + x + xy'y = 0$

3) Các phương trình thuần nhất:

a) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1$

c) $2y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -1$

b) $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$

d) $(x + 2y)dx - xdy = 0$

4) Các phương trình tuyến tính:

a) $y' - \frac{4}{x}y = 4x^7$

c) $y' = x - y$

b) $xy' + y = \sqrt{x}$

d) $(2xy + 3)dy - y^2dx = 0$

5) Các phương trình Bernoulli:

a) $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4, y(1) = 2$

c) $xy' + y = -xy^2$

b) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$

d) $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$

6) Các phương trình vi phân toàn phần:

a) $(x^2 + y)dx = (2y - x)dy$

c) $e^y dx = (xe^y - 2y)dy$

b) $(2xy + 3)dy = -y^2dx$

d) $(x^2y^2 - x)dy = ydx$

7) Các phương trình cần đổi biến và/hoặc nhận dạng:

a) $y' = (x + y)^2$

e) $3xy^2y' - y^3 = x, y(1) = 3$

b) $y' = 1 + x + y + xy$

f) $(2xy^2 - 3y^3)dx = (3xy^2 - y)dy$

c) $y' = \frac{x + y - 2}{x - y + 4}$

g) $y = xy' + y' - y' \ln(y')$

d) $(x^2 + 1)y' + xy = 1$

h) $xy' = y + x^3 \sin x, y(\pi) = 0$

2.2 Phương trình vi phân cấp hai

Giải các phương trình vi phân cấp hai sau.

Bài 16. Các phương trình khuyết (SV tự học):

a) $xy'' + 2y' = 12x^2$

c) $2yy'' = (y')^2 + 1$

b) $\begin{cases} (1 - x^2)y'' - xy' = 2, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (1 + x)y'' + x(y')^2 = y', \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$

Bài 17. Các phương trình tuyến tính hệ số hằng với vế phải có dạng đặc biệt:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

h) $y'' + y' - 2y = x + \sin 2x$

b) $y'' - 2y' + y = 0$

i) $y'' + 3y' - 4y = 200 \sin^2 x$

c) $y'' - 4y' + 3y = (15x + 37)e^{-2x}$

j) $y'' - y' - 2y = xe^x \cos x$

d) $y'' - y = 4(x + 1)e^x$

k) $y'' + 2y' + 10y = x^2e^{-x} \cos 3x$

e) $y'' - 2y' + y = (12x + 4)e^x$

l) $y'' - 3y' + 2y = e^x + \sin x$

f) $y'' + y = 2 \cos x \cos 2x$

g) $y'' + 2y' + 2y = 8 \cos x - \sin x$

m) $y'' + 4y = e^{3x} + x \sin 2x$

Bài 18. Các phương trình tuyến tính hệ số hằng giải bằng phương pháp biến thiên hằng số:

a) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

c) $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$

b) $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

Bài 19. Các phương trình tuyến tính có hệ số hàm số:

a) $(2x - x^2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = -2$ biết nó có hai nghiệm riêng $y_1 = 1, y_2 = x$

b) $y'' - \frac{2xy'}{x^2 + 1} + \frac{2y}{x^2 + 1} = 0$ biết nó có một nghiệm riêng $y_1 = x$

c) $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$

d) $\frac{y''}{(y')^3} + \frac{2}{y'} - x + y = e^y \cos y$ (Gợi ý: coi $x = x(y)$)

2.3 Hệ phương trình vi phân cấp một

Bài 20. Giải các hệ phương trình vi phân sau

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y}{x-y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{x-y} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 5z \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t} \end{cases}$$

Chương 3

Phương pháp toán tử Laplace

3.1 Phép biến đổi Laplace và phép biến đổi ngược

Bài 21. Sử dụng định nghĩa, tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

a) $f(t) = t$ b) $f(t) = e^{3t+1}$ c) $f(t) = \sinh kt$ d) $f(t) = \sin^2 t$

Bài 22. Tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

a) $f(t) = \sqrt{t} + 3t$ d) $f(t) = \cos^2(2t)$ g) $f(t) = 2 \sin 3t \cos 5t$
 b) $f(t) = t - 2e^{3t}$ e) $f(t) = (t + 1)^3$
 c) $f(t) = 1 + \cosh(5t)$ f) $f(t) = 2 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ h) $f(t) = \sinh^2(3t)$

Bài 23. Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau:

a) $F(s) = \frac{3}{s^4}$ c) $F(s) = \frac{3}{s-4}$ e) $F(s) = \frac{10s-3}{25-s^2}$
 b) $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^{\frac{5}{2}}}$ d) $F(s) = \frac{5-3s}{s^2+9}$

3.2 Phép biến đổi của bài toán với giá trị ban đầu

Bài 24. Giải các bài toán giá trị ban đầu

a) $\begin{cases} x^{(3)} - x'' - x' + x = e^{2t} \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^{(4)} - 16x = 240 \cos t \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x^{(3)} - 6x'' + 11x' - 6x = 0 \\ x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0 \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x^{(3)}(0) = 1 \end{cases}$

Bài 25. Giải các bài toán giá trị ban đầu

$$\text{a) } \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 6x + 3y \\ x(0) = 2, y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x'' + x' + y' + 2x - y = 0 \\ y'' + x' + y' + 4x - 2y = 0 \\ x(0) = y(0) = 1, \\ x'(0) = y'(0) = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x' + 2y' + x = 0 \\ x' - y' + y = 0 \\ x(0) = 1, y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x'' + 2x - 4y = 0 \\ y'' - x + 2y = 0 \\ x(0) = y(0) = 0 \\ x'(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$$

3.3 Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

Bài 26. Tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

$$\text{a) } f(t) = t^4 e^{\pi t}$$

$$\text{b) } f(t) = e^{-2t} \sin 3t$$

$$\text{c) } f(t) = e^t \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Bài 27. Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau:

$$\text{a) } F(s) = \frac{1}{s^2 - 3s}$$

$$\text{f) } F(s) = \frac{3}{2s - 4}$$

$$\text{k) } F(s) = \frac{1}{s^3 - 5s^2}$$

$$\text{b) } F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}$$

$$\text{g) } F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4}$$

$$\text{l) } F(s) = \frac{1}{s^3 - 1}$$

$$\text{c) } F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}$$

$$\text{h) } F(s) = \frac{3s + 5}{s^2 - 6s + 25}$$

$$\text{m) } F(s) = \frac{1}{s^4 - 16}$$

$$\text{d) } F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 - 1)}$$

$$\text{i) } F(s) = \frac{1}{s^2 - 4}$$

$$\text{n) } F(s) = \frac{s^2 - 2s}{s^4 + 5s^2 + 4}$$

$$\text{e) } F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\text{j) } F(s) = \frac{5 - 2s}{s^2 + 7s + 10}$$

$$\text{o) } F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s^2 + 2s + 2)^2}$$

3.4 Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

Bài 28. Tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

$$\text{a) } f(t) = t \cos^2 t$$

$$\text{e) } f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$$\text{h) } f(t) = \frac{\cosh t - 1}{t}$$

$$\text{b) } f(t) = t^2 \sin kt$$

$$\text{f) } f(t) = \frac{e^{2t} - 1}{t}$$

$$\text{i) } f(t) = \frac{1 - \cos 2t}{t}$$

$$\text{c) } f(t) = te^{2t} \sin 3t$$

$$\text{g) } f(t) = \frac{\sinh t}{t}$$

$$\text{d) } f(t) = (t - e^{2t})^2$$

Bài 29. Tìm phép biến đổi Laplace ngược của các hàm sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } F(s) = \arctan \frac{1}{s} & \text{c) } F(s) = \ln \frac{s-2}{s+2} & \text{e) } F(s) = \ln \left(1 + \frac{1}{s^2} \right) \\ \text{b) } F(s) = \ln \frac{s^2+1}{s^2+4} & \text{d) } F(s) = \ln \frac{s^2+1}{(s+2)(s-3)} & \text{f) } F(s) = \frac{e^{-3s}}{s} \end{array}$$

Bài 30. Giải các bài toán giá trị ban đầu:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} tx'' + (t-2)x' + x = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} tx'' + (4t-2)x' + (13t-4)x = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} tx'' - (4t+1)x' + 2(2t+1)x = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} ty'' - ty' + y = 2 \\ y(0) = 2, y'(0) = -4 \end{cases} \end{array}$$

Bài 31. Giải các bài toán giá trị ban đầu:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x'' + x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases} & \text{ở đó } f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x'' + 4x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases} & \text{ở đó } f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} x'' + 4x' + 4x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases} & \text{ở đó } f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} x'' + 4x' + 5x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases} & \text{ở đó } f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases} \end{array}$$

Khoa Toán - Tin